

Практическое занятие №9.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: Решение задач на вычисление неопределенных интегралов с использованием методов интегрирования.

Найти указанные неопределенные интегралы и результаты проверить дифференцированием.

1) Методом непосредственного интегрирования

a) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$ b) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$ c) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}} dx$

2) Методом замены переменной

a) $\int \frac{x^2}{2x^3+1} dx$ b) $\int \operatorname{tg} x dx$ c) $\int e^{\cos x} \sin x dx$ d) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ e) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$
f) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ g) $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$ h) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$ k) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+2x^3+3}$ m) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$

3) Методом интегрирования по частям

a) $\int x \ln(x-1) dx$ b) $\int \sqrt{x} \ln x dx$ c) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$ d) $\int \arcsin x dx.$

4) Интегрирование рациональных дробей

a) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx.$ b) $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ c) $\int \frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ d) $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx$

5) Интегрирование тригонометрических функций

a) $\int \cos^3 x \sin^{10} x dx$ b) $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}.$ c) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$

6) Интегрирование иррациональных функций

a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ b) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №9 (ФИТ)

Пример 1. Найти все первообразные для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1, 1)$.

Пример 2-48. Найти неопределенные интегралы:

2) $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx$ 3) $\int (1 - \sqrt{x})^2 dx$ 4) $\int \frac{x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{x^2} dx$ 5) $\int \sin^2 x dx$ 6) $\int \sin x \cos 3x dx$
7) $\int \cos(7x-3) dx.$ 8) $\int \frac{x+3}{x+6} dx$ 9) $\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$ 10) $\int (2x+1)^{20} dx$ 11) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$
12) $\int \sqrt[3]{1+\sin x} \cos x dx$ 13) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx$ 14) $\int x(x^2+1)^{3/2} dx.$ 15) $\int x\sqrt{x-5} dx$ 16) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$
17) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$ 18) $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$ 19) $\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) \frac{dx}{x}.$ 20) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ 21) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$
22) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$ 23) $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$ 24) $\int x^2 e^{5x} dx$ 25) $\int (x^2+2x) \cos 2x dx$ 26) $\int \frac{\ln x}{x^3}$

$$\begin{aligned}
& 27) \int e^{2x} \cos x \, dx \quad 28) \int x^2 \sin x \, dx \quad 29) \int x \ln x \, dx \quad 30) \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} \, dx \quad 31) \int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} \, dx \\
& 32) \int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)} \, dx \quad 33) \int \frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6} \, dx \quad 34) \int \frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2} \, dx \\
& 35) \int \frac{dx}{x^5-x^2} \quad 36) \int \frac{x \, dx}{(x-1)^2(x+1)^3} \quad 37) \int \frac{dx}{(x^3+1)^2} \quad 38) \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} \quad 39) \int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5} \\
& 40) \int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} \quad 41) \int \frac{\cos^7 x \, dx}{\sin^4 x} \quad 42) \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} \, dx \quad 43) \int \frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x \cos x-16\cos^2 x} \\
& 44) \int \sin 7x \sin 2x \, dx \quad 45) \int \sin 10x \cos 7x \cos 4x \, dx \quad 46) \int \sin^4 x \, dx \\
& 47) \int \frac{\sqrt[6]{x+1} \, dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} \quad 48) \int \frac{dx}{x^7 \sqrt{1+x^4}}
\end{aligned}$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

8.1.8. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интеграл:

$$1) \int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7 \right) dx; \quad 2) \int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} \, dx.$$

● 1) Воспользуемся свойствами 3 и 4 неопределенного интеграла:

$$\begin{aligned}
& \int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7 \right) dx = \int 3 \cdot 5^x \, dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \, dx + \int 7 \, dx = \\
& = 3 \int 5^x \, dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx + 7 \int dx = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln a} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 7x + C = \\
& = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln a} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 7x + C.
\end{aligned}$$

2) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель: $\frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} \, dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \\
& = \int x^{\frac{3}{2}} \, dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} \, dx + 5 \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \\
& = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \\
& = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C. \quad \bullet
\end{aligned}$$

8.1.22. Найти интегралы:

$$1) \int \sin^2 x \, dx; \quad 2) \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx.$$

● 1) Воспользуемся формулой понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Отсюда

$$\begin{aligned}
& \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \\
& = \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos 2x \, dx \right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.
\end{aligned}$$

2) Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \\ &= \int dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - \operatorname{arctg} x + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

8.2.1. Найти интеграл, используя подходящую подстановку:

- 1) $\int (7x - 1)^{23} dx$;
- 2) $\int x^2 \cdot \sin(x^3 + 1) dx$;
- 3) $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$.

○ 1) Данный интеграл — почти табличный и поэтому легко вычисляется с помощью свойства 5 интеграла из предыдущего параграфа. Однако такие интегралы можно находить и с помощью замены переменной.

В нашем случае применим подстановку $t = 7x - 1$. Тогда $dt = 7dx$, откуда $dx = \frac{1}{7}dt$. Поэтому

$$\int (7x - 1)^{23} dx = \int t^{23} \cdot \frac{1}{7} dt = \frac{1}{7} \int t^{23} dt = \frac{1}{7} \cdot \frac{t^{24}}{24} + C.$$

Возвращаясь к переменной x , получим окончательно:

$$\int (7x - 1)^{23} dx = \frac{(7x - 1)^{24}}{168} + C.$$

2) Подынтегральное выражение содержит сложную функцию $\sin(x^3 + 1)$, поэтому стоит попробовать подстановку $t = x^3 + 1$. Тогда $dt = d(x^3 + 1) = 3x^2 dx$, откуда $x^2 dx = \frac{1}{3}dt$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x^3 + 1) dx &= \int \sin(x^3 + 1) \cdot x^2 dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{3} dt = \\ &= \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 1) + C. \end{aligned}$$

3) Поскольку $x dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2 + 1)$, а выражение $x^2 + 1$ стоит в знаменателе подынтегральной дроби, то целесообразно сделать замену $t = x^2 + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2 + 1} &= \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

Мы избавились от знака модуля в последнем выражении, так как $x^2 + 1 > 0$, $\forall x$. ●

8.2.10. Найти интеграл с помощью подстановки, предварительно преобразовав подынтегральное выражение:

$$1) \int \frac{x - \sin \frac{1}{x}}{x^2} dx; \quad 2) \int \frac{5x - 1}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$$

○ 1) Представим исходный интеграл в виде разности двух интегралов:

$$\int \frac{x - \sin \frac{1}{x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{x}{x^2} - \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$$

Первый из двух последних интегралов — табличный, а во втором надо сделать подстановку $t = \frac{1}{x}$. Тогда $dt = -\frac{dx}{x^2}$, откуда $\frac{dx}{x^2} = -dt$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x - \sin \frac{1}{x}}{x^2} dx &= \ln |x| - \int \sin t \cdot (-dt) = \ln |x| + \int \sin t dt = \\ &= \ln |x| - \cos t + C = \ln |x| - \cos \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

2) Запишем данный интеграл как разность двух интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 1}{\sqrt{4 - x^2}} dx &= \int \left(\frac{5x}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx = \\ &= 5 \int \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}. \end{aligned}$$

Второй из двух полученных интегралов — табличный, а в первом сделаем подстановку $t = 4 - x^2$. При этом условимся писать все вспомогательные выкладки и обозначения, относящиеся к данной подстановке, в квадратных скобках под соответствующим интегралом. В частности,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}} &= \left[\begin{array}{l} t = 4 - x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \\ \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{4 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int \frac{5x - 1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = -5\sqrt{4 - x^2} - \arcsin \frac{x}{2} + C. \quad \bullet$$

8.2.15. Найти интеграл, используя подходящую подстановку $x = \psi(t)$:

$$1) \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1 + \sqrt{x})}}.$$

○ 1) Сделаем такую замену $x = \psi(t)$, чтобы подкоренное выражение $1 - x^2$ стало полным квадратом. Подходит, например, подстановка $x = \sin t$ (или $x = \cos t$). Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 - x^2} dx}{x^2} &= [x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt] = \\ &= \int \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt}{\sin^2 t} = \int \frac{\sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt}{\sin^2 t} = \int \frac{\cos^2 t dt}{\sin^2 t} = \\ &= \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = \\ &= -\operatorname{ctg} t - t + C. \end{aligned}$$

Учитывая, что $t = \arcsin x$, получим окончательно:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx &= -\operatorname{ctg}(\arcsin x) - \arcsin x + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.\end{aligned}$$

2) Сделаем замену $x = t^2$, чтобы корни извлекались нацело:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} &= [x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt, \quad t = \sqrt{x}] = \int \frac{2t dt}{t(1+t)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2 \ln |t+1| + C = 2 \ln(\sqrt{x}+1) + C. \quad \bullet\end{aligned}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

8.3.1. Найти интеграл $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx$.

○ Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, поэтому данная дробь — простейшая третьего типа.

Сначала найдем производную знаменателя дроби:

$$(x^2 + 4x + 13)' = 2x + 4.$$

Затем выделим производную знаменателя в числителе дроби:

$$6x - 7 = 3(2x + 4) - 19.$$

Отсюда, учитывая, что $x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 + 9$, имеем:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx &= \int \frac{3(2x+4)-19}{x^2+4x+13} dx = \\ &= 3 \int \frac{(2x+4) dx}{x^2+4x+13} - 19 \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \\ &= \left[\begin{array}{ll} t = x^2 + 4x + 13, & y = x + 2, \\ dt = (2x + 4) dx & dy = dx \end{array} \right] = \\ &= 3 \int \frac{dt}{t} - 19 \int \frac{dy}{y^2+3^2} = 3 \ln |t| - \frac{19}{3} \operatorname{arctg} \frac{y}{3} + C = \\ &= 3 \ln(x^2 + 4x + 13) - \frac{19}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C.\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $x^2 + 4x + 13 > 0$ ($\forall x$) и, стало быть, $|x^2 + 4x + 13| = x^2 + 4x + 13$. $\bullet$

8.3.8. Найти интеграл $\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2} dx$.

○ Поскольку дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, то эта дробь — простейшая четвертого типа. Выделим производную этого трехчлена в числителе дроби:

$$8x + 5 = 4(2x - 2) + 13.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2} dx &= \\ &= 4 \int \frac{(2x-2)dx}{(x^2-2x+17)^2} + 13 \int \frac{dx}{[(x-1)^2+16]^2} = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = x^2 - 2x + 17, \\ dt = (2x - 2) dx \end{array} \quad \begin{array}{l} y = x - 1, \\ dy = dx \end{array} \right] = \\ &= 4 \int \frac{dt}{t^2} + 13 \int \frac{dy}{[y^2+16]^2} = -\frac{4}{x^2-2x+17} + 13 \int \frac{dy}{(y^2+16)^2}. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся рекуррентной формулой при $n = 2$, $a^2 = 16$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(y^2+16)^2} &= \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 16} \cdot \frac{y}{(y^2+16)} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dy}{y^2+4^2} = \\ &= \frac{y}{32(y^2+16)} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{y}{4} + C = \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

Отсюда окончательно

$$\begin{aligned} \int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2} dx &= \\ &= \frac{13}{32} \left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} \right) - \frac{4}{x^2-2x+17} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

8.3.12. Вычислить интегралы:

- а) $\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} dx$;
- б) $\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)} dx$;
- в) $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x} dx$.

○ а) Подынтегральная дробь — правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B , приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-3)}{(x-3)(x+2)},$$

т. е.

$$7x+4 = A(x+2) + B(x-3). \quad (3.2)$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами: с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. *Метод неопределенных коэффициентов.* Раскроем скобки в правой части равенства (3.2) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x + 4 = (A + B)x + (2A - 3B).$$

Так как многочлены в обеих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x . Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ 2A - 3B = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = 5$, $B = 2$.

2. *Метод частных значений.* Придадим неизвестной x в равенстве (3.2) частное значение $x = 3$. Тогда получим

$$7 \cdot 3 + 4 = A \cdot (3 + 2), \text{ т. е. } 25 = 5A,$$

откуда $A = 5$. Подставляя теперь в уравнение (3.2) значение $x = -2$ (удобнее всего подставлять значения, обращающие одну или несколько скобок в правой части равенства в ноль; эти значения совпадают с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим

$$7 \cdot (-2) + 4 = B \cdot (-2 - 3),$$

откуда $B = 2$.

Таким образом,

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x + 2}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx &= 5 \int \frac{dx}{x - 3} + 2 \int \frac{dx}{x + 2} = \\ &= 5 \ln |x - 3| + 2 \ln |x + 2| + C. \end{aligned}$$

б) Подынтегральная дробь — правильная, однако ее знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Отсюда

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2}.$$

Разложим эту дробь на простейшие:

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2 + 5x - 2 = A(x + 1)^2 + B(x - 1) + C(x - 1)(x + 1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов A , B и C воспользуемся методом частных значений.

Положим $x = 1$, тогда

Положим $x = 1$, тогда

$$1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = A \cdot (1 + 1)^2,$$

т. е. $4A = 4$, откуда $A = 1$. Аналогично, положим $x = -1$. Тогда

$$(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 2 = B \cdot (-1 - 1),$$

откуда $B = 3$.

Осталось найти коэффициент C . Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким подстановкам. Проще всего положить $x = 0$. Тогда $-2 = A - B - C$, откуда, с учетом найденных значений A и B , получим $-2 = 1 - 3 - C$, т. е. $C = 0$.

Итак,

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{(x + 1)^2},$$

т. е. окончательно

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + 3 \cdot \int \frac{dx}{(x + 1)^2} = \\ &= \ln |x - 1| - \frac{3}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

в) Данная подынтегральная дробь — неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 & x^3 + x^2 + x \\ \hline x^5 + & x^4 + & x^3 & & \\ \hline - & x^4 - & x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 & & \\ - & x^4 - & x^3 - & x^2 & \\ \hline & & x^2 - 1 & & \end{array}$$

т. е.

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} = x^2 - x + \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx &= \int (x^2 - x) dx + \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx. \end{aligned}$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим

$$x^2 - 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x.$$

Сначала воспользуемся методом частных значений. Положив $x = 0$, найдем $A = -1$. Далее воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (на практике часто приходится комбинировать оба метода). Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приведем подобные:

$$x^2 - 1 = (A + B)x^2 + (A + C)x + A.$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты при x^2 и x , в левой и правой частях последнего равенства получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + C = 0, \end{cases}$$

откуда, учитывая, что $A = -1$, найдем оставшиеся коэффициенты: $B = 2$, $C = 1$. Таким образом,

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} = -\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

откуда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= [t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 1) dx] = \\ &= -\ln |x| + \int \frac{dt}{t} = -\ln |x| + \ln |t| + C = \\ &= -\ln |x| + \ln(x^2 + x + 1) + C = \ln \left| \frac{x^2 + x + 1}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln \left| \frac{x^2 + x + 1}{x} \right| + C. \quad \bullet$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

8.4.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

○ В подынтегральном выражении есть корни второй и третьей степеней от x , поэтому делаем подстановку $x = t^6$ (6 — наименьшее общее кратное чисел 2 и 3). Отсюда $dx = 6t^5 dt$ и, значит,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t + 1} = \\ &= 6 \int \frac{(t^3 + 1) - 1}{t + 1} dt = 6 \left[\int \frac{t^3 + 1}{t + 1} dt - \int \frac{dt}{t + 1} \right] = \\ &= 6 \left[\int \frac{(t + 1)(t^2 - t + 1)}{t + 1} dt - \ln |t + 1| \right] = \\ &= 6 \left[\int (t^2 - t + 1) dt - \ln |t + 1| \right] = \\ &= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |t + 1| \right) + C = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t + 1| + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln |\sqrt[6]{x} + 1| + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

8.4.4. Найти интеграл $\int \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$.

○ Наименьшее общее кратное показателей корней в подынтегральном выражении равно 6, поэтому делаем подстановку (случай 2) $1+x = t^6$, откуда $x = t^6 - 1$, $dx = 6t^5 dt$, то есть

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx &= \int \frac{(t^6 - 1) + t^3}{t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int (t^9 + t^6 - t^3) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = 6t^4 \left(\frac{t^6}{10} + \frac{t^3}{7} - \frac{1}{4} \right) + C = \\ &= 6 \sqrt[3]{(1+x)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{10} + \frac{\sqrt{1+x}}{7} - \frac{1}{4} \right) + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

8.4.7. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

○ В соответствии с указанной выше рекомендацией (случай 3) сделаем подстановку $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Отсюда $1-x = (1+x)t^2$, т. е.

$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, и значит,

$$dx = \frac{(1-t^2)'(1+t^2) - (1+t^2)'(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} &= \int t \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{(-4t)dt}{(1+t^2)^2} = \\ &= 4 \int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = 4 \int \frac{(t^2-1)+1}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = \\ &= 4 \left[\int \frac{t^2-1}{(t^2-1)(t^2+1)} dt + \int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2+1)} \right] = \\ &= 4 \left[\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt \right] = \\ &= 4 \int \frac{dt}{t^2+1} + 2 \int \frac{dt}{t^2-1} - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= 2 \left(\int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2-1} \right) = 2 \left(\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C = \\ &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1} \right| + C = \\ &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right| + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

8.4.9. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1+3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx$.

○ Представим данный интеграл в следующем виде:

$$\int x^{\frac{1}{3}} \cdot (1 + 3 \cdot x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} dx.$$

Отсюда видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином (случай 4), при этом $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3}$. Так как в данном случае $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{3}} = 2$ — целое число, то следует применить подстановку 2), т. е. $1 + 3x^{\frac{2}{3}} = t^3$. Следовательно, $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}(t^3 - 1)^{\frac{3}{2}}$, и значит, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(t^3 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot t^2 dt$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \frac{\sqrt{t^3 - 1}}{\sqrt{3}} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{t^3 - 1} \cdot t^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} \int (t^3 - 1)t^3 dt = \frac{1}{2} \int (t^6 - t^3) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \\ &= \frac{t^7}{14} - \frac{t^4}{8} + C = \frac{1}{14} \sqrt[3]{(1 + 3\sqrt[3]{x^2})^7} - \frac{1}{8} \sqrt[3]{(1 + 3\sqrt[3]{x^2})^4} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

8.5.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x - 5}$.

○ Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой (случай 1):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x - 5} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} = \\ &= \int \frac{2dt}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)} = - \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \\ &= - \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

8.5.4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

○ Поскольку подынтегральная функция удовлетворяет условию (5.1), то применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$ (случай 2, тогда $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$). Для удобства поделим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\cos^2 x$ и воспользуемся тождеством $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{tg}^2 x} = [t = \operatorname{tg} x] = \\ &= \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})} \operatorname{arctg} \frac{t}{(\frac{1}{\sqrt{2}})} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

8.5.7. Найти интеграл:

1) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx;$

2) $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x}.$

○ 1) Подынтегральная функция меняет знак при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$, поэтому применяем (случай 3) подстановку $t = \cos x$. Тогда

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x} dx &= \int \sin^2 x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sin x dx = \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sin x dx = \\ &= [t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx] = \int (1 - t^2) \sqrt{t} (-dt) = \\ &= \int (t^{5/2} - t^{1/2}) dt = \frac{2}{7} t^{7/2} - \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \\ &= \frac{2}{7} \sqrt{\cos^7 x} - \frac{2}{3} \sqrt{\cos^3 x} + C.\end{aligned}$$

2) Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\sin x \cdot \sin 2x} = \frac{1}{\sin x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2 \sin^2 x \cdot \cos x}.$$

Теперь видно, что эта функция меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$. Поэтому воспользуемся (случай 3) подстановкой $t = \sin x$, предварительно домножив числитель и знаменатель преобразованной подынтегральной дроби на $\cos x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2 \sin^2 x \cdot \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)} = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2(1 - t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{(1 - t^2 + t^2)}{t^2(1 - t^2)} dt = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1 - t^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C = -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sin x} + \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \right) + C. \quad \bullet\end{aligned}$$

8.5.10. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$.

○ В данном примере имеет место случай 4, поэтому сначала упростим подынтегральное выражение.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cdot (\sin x \cos x)^2 dx = \\ &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) \sin^2 2x dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \\ &= [t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2 \cos 2x dx] = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int t^2 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{16} \left(\int dx - \int \cos 4x dx \right) - \\ &\quad - \frac{1}{16} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3} \right) + C. \quad \bullet\end{aligned}$$

8.5.13. Найти интеграл $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$.

○ Здесь удобно воспользоваться формулами (5.2). Учитывая, что $\cos 5x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x)$, получим

$$\begin{aligned}\int \cos 5x \cdot \cos 3x &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 8x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \cos 2x dx + \int \cos 8x dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 8x + C. \quad \bullet\end{aligned}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \quad (5.2)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

8.5.16. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

○ Имеет место случай 6. Поэтому используем формулу для $\operatorname{tg}^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^3 x dx = \left[t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \right] = \\ &= \int t^3 dt - \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{t^4}{4} - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x dx = [t = \operatorname{tg} x] = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int t dt - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = [y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x dx] = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{t^2}{2} + \int \frac{dy}{y} = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |y| + C = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C. \quad \bullet\end{aligned}$$